Модель учета турбулентных свойств атмосферы в уравнениях переноса

В. С. Ножкин, E-mail: nozhkin-v@list.ru [1]
М. Е. Семёнов [1, 2], И. И. Ульшин [1]

[1] Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
[2] Воронежский государственный университет

Аннотация. *В работе предложена модель учета турбулентных свойств атмосферы на основе решения уравнения переноса тепла. Получены первые две моментные функции решения уравнения конвективного притока тепла. Представлены математическое ожидание и дисперсионная функция в случае гауссова распределения случайного процесса, входящего в уравнение притока тепла.*

Ключевые слова: *модель, турбулентные свойства, коэффициент турбулентности, случайный процесс, характеристический функционал, математическое ожидание, дисперсионная функция.*

Введение

Различные процессы, связанные с теплопередачей в атмосфере в значительной степени влияют на изменения погодных условий. К ним относятся: конвективный и турбулентный теплообмен; излучение и поглощение радиации; фазовые превращения воды; молекулярный теплообмен [1, 2]. Количественные оценки турбулентного и конвективного потоков тепла особенно важны при разработке краткосрочных прогнозов погоды с использованием гидродинамического моделирования.

Гидродинамическое моделирование процессов теплопередачи связано с определенными трудностями, обусловленными, в том числе следующими соображениями. Существующие модели, как правило, включают в себя уравнения, связывающие усредненные значения метеорологических параметров. Это является, безусловно оправданным для мезо- и макромасштабных уровней, охватывающих территории с горизонтальными размерами порядка сотен и тысяч километров, однако на микроуровне необходим также учет неупорядоченных хаотических возмущений, связанных с неоднородностями в поле ветра, которым подвержены значения метеорологических величин. В этом случае использование усредненных значений в уравнениях переноса приводит к ошибкам в рассчитанных значениях [1-5]. В связи с этим целью настоящей работы является построение модели, позволяющей учитывать турбулентные свойства атмосферы в процессах теплопередачи в атмосфере.

1. Постановка задачи

Уравнение притока тепла в адиабатическом приближении [1, 2] имеет вид:

$$\frac{\partial T_B}{\partial t} + u\frac{\partial T_B}{\partial x} + v\frac{\partial T_B}{\partial y} = \frac{(\gamma_a - \gamma)}{g\rho}w \tag{1}$$

где T_B – температура воздуха; u, v – проекции вектора скорости движения частицы на горизонтальные оси локальной системы координат; γ_a – сухоадиабатический градиент температуры; γ – вертикальный градиент температуры; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность воздуха; w – аналог вертикальной скорости в p-системе координат.

В рассматриваемых условиях проекцию вектора скорости в уравнениях переноса естественно трактовать как случайный процесс. Для упрощения расчетов рассматривается одномерный случай уравнения (1), и вводится обозначение $f(x) = \frac{(\gamma_a - \gamma)}{g\rho}w$. Функция $f(x)$ считается детерминированной. Тогда запишем:

$$\frac{\partial T_B}{\partial t} + \varepsilon(t)\frac{\partial T_B}{\partial x} = f(x) \tag{2}$$

где $\varepsilon(t)$ – случайный процесс, формализующий модельные представления о динамики изменения горизонтальной компоненты вектора скорости ветра,
с детерминированным начальным условием:

$$T_B(t_0, x) = T_{B_0}(x);\ -\infty < x < \infty \tag{3}$$

Случайный процесс задается посредством характеристического функционала [3-5]:

$$\varphi(\nu) = M\left[\exp\left(i\int_T \varepsilon(\tau)\nu(\tau)d\tau\right)\right] \tag{4}$$

где функция v принадлежит пространству $L_1(T)$ суммируемых на отрезке T функций с нормой $\|v\| = \int_T |v(\tau)| d\tau$; T – отрезок времени, на котором изучается процесс $[0; t]$; M – математическое ожидание по функции распределения процесса $\varepsilon(t)$.

Один из методов решения представленной выше задачи связан с переходом к эквивалентному детерминированному уравнению на основе подхода, развитого в работах [3-5] и связанного с понятием вариационной производной. Данный метод подразумевает идентификацию первых двух моментных функций уравнения притока тепла со случайными параметрами.

2. Математическое ожидание и дисперсионная функция решения уравнения притока тепла

Умножив уравнение (2) на $\exp(i\int_T \varepsilon(\tau)v(\tau)d\tau)$ и определив математическое ожидание полученного равенства, можно записать:

$$M\left[\frac{\partial T_B}{\partial t}\exp(i\int_T \varepsilon(\tau)v(\tau)d\tau)\right] = M\left[-\varepsilon(t)\frac{\partial T_B}{\partial x}\exp(i\int_T \varepsilon(\tau)v(\tau)d\tau)\right] + \\ + f(x)M\left[\exp(i\int_T \varepsilon(\tau)v(\tau)d\tau)\right] \tag{5}$$

Для дальнейших вычислений введем в рассмотрение вспомогательное отображение:

$$y(t,x,v) = M\left[T_B(t,x)\exp(i\int_T \varepsilon(\tau)v(\tau)d\tau)\right] \tag{6}$$

где $x \in R; v(t) \in L_1(T)$.

С учетом введенного отображения (6), полученное равенство (5) запишется в виде:

$$\frac{\partial y(t,x,v)}{\partial t} = i\frac{\delta}{\delta v(t)}\frac{\partial}{\partial x}y(t,x,v) + f(x)\varphi(v) \tag{7}$$

с начальным условием:

$$y(0,x,\nu) = T_{B_0}(x)\varphi(\nu) \qquad (8)$$

Один из подходов к решению дифференциального уравнения с частной и обыкновенной производной, представленного равенством (7) и начальным условием (8), описан в работах [3-5]. В результате применения данного подхода математическое ожидание решения задачи (2) при начальном условии (3) принимает вид:

$$M(T_B(t,x)) = T_{B_0}(x) \overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\left[\varphi(\xi\chi(0,t))\right](x) + \\ + f(x) \overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\left[\int_0^t \varphi(\xi\chi(\tau,t))\,d\tau\right](x) \qquad (9)$$

где $\overset{x}{*}$ – знак свертки функций по x; F_{ξ}^{-1} – обратное преобразование Фурье по ξ; ξ – двойственная к x характеристика; χ – функция, зависящая от трех переменных $\chi(\tau,w,t)$ следующим образом: $\chi(\tau,w,t) = sign\,(w-\tau)$ при w, принадлежащем отрезку с концами τ,t и $\chi(w,t,\tau) = 0$ в противном случае.

Вторая моментная функция решения уравнения (2) определяется соотношением:

$$M(T_B(t,x)T_B(\gamma,x_1)) = T_{B_0}(x) \overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\Big[T_{B_0}(x_1) \overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}\left[\varphi(\xi_1\chi(0,\gamma) + \right. \\ \left. + \xi\chi(0,t))\right](x_1) + f(x_1) \overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}\left[\int_0^{\gamma} \varphi(\xi_1\chi(\tau,\gamma) + \xi\chi(0,t))\,d\tau\right](x_1)\Big](x) + \\ + f(x) \overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\Big[\int_0^t \Big(T_{B_0}(x_1) \overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}\left[\varphi(\xi_1\chi(0,\gamma) + \xi\chi(\tau_1,t))\right](x_1) + \\ + f(x_1) \overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}\left[\int_0^{\gamma} \varphi(\xi_1\chi(\tau,\gamma) + \xi\chi(\tau_1,t))\,d\tau\right](x_1)\Big)d\tau_1\Big](x) \qquad (10)$$

Дисперсионная функция решения уравнения (2) имеет вид:

$$D(T_B(t,x)) = \Big(T_{B_0}(x) \overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\Big[T_{B_0}(x_1) \overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}\left[\varphi(\xi_1\chi(0,\gamma) + \right. \qquad (11)$$

$$+\xi\chi(0,t))\Big](x_1)+f(x_1)\overset{x_1}{*}F_{\xi_1}^{-1}\left[\int_0^{\gamma}\varphi(\xi_1\chi(\tau,\gamma)+\xi\chi(0,t))\,d\tau\right](x_1)\Bigg](x)+$$

$$+f(x)\overset{x}{*}F_{\xi}^{-1}\left[\int_0^{t}\left(T_{B_0}(x_1)\overset{x_1}{*}F_{\xi_1}^{-1}\left[\varphi(\xi_1\chi(0,\gamma)+\xi\chi(\tau_1,t))\right](x_1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+f(x_1)\overset{x_1}{*}F_{\xi_1}^{-1}\left[\int_0^{\gamma}\varphi(\xi_1\chi(\tau,\gamma)+\xi\chi(\tau_1,t))\,d\tau\right](x_1)\right)d\tau_1\right](x)\right)\Bigg|_{\substack{\gamma=t,\\ x_1=x}}-$$

$$-\left(T_{B_0}(x)\overset{x}{*}F_{\xi}^{-1}\left[\varphi(\xi\chi(0,t))\right](x)+f(x)\overset{x}{*}F_{\xi}^{-1}\left[\int_0^{t}\varphi(\xi\chi(\tau,t))\,d\tau\right](x)\right)^2$$

Равенства (9), (11) определяют математическое ожидание и дисперсионную функцию решения дифференциального уравнения (2) с начальным условием (3). Данные равенства получены для случайного процесса, характеристический функционал которого задан в виде (4). В зависимости от закона распределения случайного процесса, будет изменяться и его характеристический функционал. В работах [6-7] определен и обоснован нормальный закон распределения проекции вектора скорости, поэтому статистические характеристики решения уравнения (2) определялись для случая нормального (гауссова) распределения.

3. Математическое ожидание и дисперсионная функция решения уравнения притока тепла в случае гауссова распределения проекции вектора скорости

В случае гауссова распределения случайного процесса входящего в уравнение (2) характеристический функционал имеет вид:

$$\varphi(\nu)=\exp\left(i\int_0^{t_1}M(\varepsilon(\tau))\nu(\tau)\,d\tau-\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_1}b(\tau_1,\tau_2)\nu(\tau_1)\nu(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right),\quad (12)$$

где $b(\tau_1,\tau_2)=M(\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2))-M(\varepsilon(\tau_1))M(\varepsilon(\tau_2))$ – ковариационная функция процесса $\varepsilon(t)$.

На основании вышесказанного математическое ожидание решения задачи (2) с начальным условием (3) имеет вид:

$$M(T_B(t,x)) = T_{B_0}(x) \overset{x}{*} F_\xi^{-1}\left[\exp\left(i\xi\int_0^t M(\varepsilon(\tau))\,d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right)\right](x) + f(x) \overset{x}{*} F_\xi^{-1}\left[\int_0^t \exp\left(i\xi\int_\tau^t M(\varepsilon(\tau_1))\,d\tau_1 - \right.\right. \tag{13}$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\xi^2\int_\tau^t\int_\tau^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right) d\tau\right](x)$$

Вторая моментная функция решения уравнения (2) определяется выражением:

$$M(T_B(t,x)T_B(\gamma,x_1)) = T_{B_0}(x) \overset{x}{*} F_\xi^{-1}\left[T_{B_0}(x_1) \overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}\left[\exp\left[i\xi_1\int_0^\gamma M(\varepsilon(\tau))\,d\tau + \right.\right.\right.$$

$$+ i\xi\int_0^t M(\varepsilon(\tau))\,d\tau - \frac{1}{2}\xi_1^2\int_0^\gamma\int_0^\gamma b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \xi_1\xi\int_0^\gamma\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 -$$

$$\left. - \frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right]\Bigg](x_1) + f(x_1) \overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}\left[\int_0^\gamma \exp[\; i\xi_1\int_\tau^\gamma M(\varepsilon(\tau))\,d\tau + \right.$$

$$+ i\xi\int_0^t M(\varepsilon(\tau))\,d\tau - \frac{1}{2}\xi_1^2\int_\tau^\gamma\int_\tau^\gamma b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \xi_1\xi\int_\tau^\gamma\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 -$$

$$\left. - \frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\int_0^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2]d\tau\right](x_1)\Bigg](x) + f(x) \overset{x}{*} F_\xi^{-1}\left[\int_0^t\left(T_{B_0}(x_1) \overset{x_1}{*}\right.\right.$$

$$\overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}\left[\exp[i\xi_1\int_0^\gamma M(\varepsilon(\tau))\,d\tau + i\xi\int_{\tau_1}^t M(\varepsilon(\tau))\,d\tau - \frac{1}{2}\xi_1^2\int_0^\gamma\int_0^\gamma b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \right.$$

$$\left. - \xi_1\xi\int_0^\gamma\int_{\tau_1}^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \frac{1}{2}\xi^2\int_{\tau_1}^t\int_{\tau_1}^t b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2]\right](x_1) + f(x_1) \overset{x_1}{*}$$

$$\overset{x_1}{*} F_{\xi_1}^{-1}\left[\int_0^{\gamma}\left(\exp\left[\, i\xi_1\int_{\tau}^{\gamma} M\,(\varepsilon(\tau))\,d\tau + i\xi\int_{\tau_1}^{t} M\,(\varepsilon(\tau))\,d\tau - \frac{1}{2}\xi_1^{2}\int_{\tau}^{\gamma}\int_{\tau}^{\gamma} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \xi_1\xi\int_{\tau}^{\gamma}\int_{\tau_1}^{t} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \frac{1}{2}\xi^{2}\int_{\tau_1}^{t}\int_{\tau_1}^{t} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right]\right)d\tau\right](x_1)\Big)\,d\tau_1\Big](x) \tag{14}$$

При этом дисперсионная функция имеет вид:

$$D(T_B(t,x)) = \left(T_{B_0}(x)\overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\left[T_{B_0}(x)\overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\left[\exp\left[\,2i\xi\int_0^{t} M\,(\varepsilon(\tau))\,d\tau - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left. - \xi^{2}\int_0^{t}\int_0^{t} b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\,\right]\Big](x) + f(x)\overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\left[\int_0^{t}\left(\exp\left[\, i\xi\int_{\tau}^{t} M\,(\varepsilon(\tau))\,d\tau + \right.\right.\right.$$

$$+ i\xi\int_0^{t} M\,(\varepsilon(\tau))\,d\tau - \frac{1}{2}\xi^{2}\int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \xi^{2}\int_{\tau}^{t}\int_0^{t} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 -$$

$$\left.\left.\left. - \frac{1}{2}\xi^{2}\int_0^{t}\int_0^{t} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right]\right)d\tau\right](x)\Big](x) + f(x)\overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\left[\int_0^{t}\left(T_{B_0}(x)\overset{x}{*}\right.\right. \tag{15}$$

$$\overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\left[\exp\left[i\xi\int_0^{t} M\,(\varepsilon(\tau))\,d\tau + i\xi\int_{\tau_1}^{t} M\,(\varepsilon(\tau))\,d\tau - \frac{1}{2}\xi^{2}\int_0^{t}\int_0^{t} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \xi^{2}\int_0^{t}\int_{\tau_1}^{t} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \frac{1}{2}\xi^{2}\int_{\tau_1}^{t}\int_{\tau_1}^{t} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\,\right]\right](x) + f(x)\overset{x}{*}$$

$$\overset{x}{*} F_{\xi}^{-1}\left[\int_0^{t}\left(\exp\left[\, i\xi\int_{\tau}^{t} M\,(\varepsilon(\tau))\,d\tau + i\xi\int_{\tau_1}^{t} M\,(\varepsilon(\tau))\,d\tau - \frac{1}{2}\xi^{2}\int_{\tau}^{t}\int_{\tau}^{t} b(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 - \right.\right.\right.$$

$$
\left.\left.\left.\left.\left.-\xi^{2}\int_{\tau}^{t}\int_{\tau_1}^{t}b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2-\frac{1}{2}\xi^{2}\int_{\tau_1}^{t}\int_{\tau_1}^{t}b(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2\right]\right)d\tau\right](x)\right)d\tau_1\right](x)\right)-
$$

$$
-\left(T_{B_0}(x)\overset{x}{*}F_{\xi}^{-1}\left[\varphi(\xi\chi(0,t))\right](x)+f(x)\overset{x}{*}F_{\xi}^{-1}\left[\int_{0}^{t}\varphi(\xi\chi(\tau,t))d\tau\right](x)\right)^{2}
$$

Заключение

В настоящей статье предложена модель учета турбулентных свойств атмосферы, через компоненты скорости ветра в уравнении притока тепла в атмосфере. Идентифицированы математическое ожидание и дисперсионная функция решения уравнения притока тепла со случайными коэффициентами, как в общем виде, так и для гауссова распределения.

Список литературы

1. Nozhkin, V. S. A stochastic approach to the solution to the differential equation of heat transfer in the atmosphere / V.S. Nozhkin, M.E. Semenov, I.I. Ulshin // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – vol. 1368 042012. doi:10.1088/1742-6596/1368/4/042012.
2. Zadorozhniy, V. G. Stochastic model of heat transfer in the atmospheric surface layer / V. G. Zadorozhniy, V. S. Nozhkin, M. E. Semenov, I.I. Ul’shin // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2020. – vol. 60. – P. 459–471. doi.org/10.1134/S0965542520030 173.
3. Zadorozhnii, V. G. A linear firet-order differential equation with ordinary variational derivatives / V.G. Zadorozhnii // – Moscow: Pleiades Publishing, Ltd., April 1993. – Vol. 53. – P. 383-388.
4. Zadorozhniy, V. G. Stabilization of Linear Systems by a Multiplicative Random Noise / V. G. Zadorozhnii // Differential Equations. 2018, Vol. 54, i. 6. P. 728-747.
5. Zadorozhniy, V. G. Linear chaotic resonance in vortex motion / V. G. Zadorozhnii // Computational mathematics and mathematical physics. 2013, Vol. 53, i. 4. P. 486-502.
6. Nozhkin, V. A stochastic model of the moisture motion in the atmosphere: two-dimensional case / V. Nozhkin, M. Semenov, I. Ulshin and O. Sokolova // IEEE Xplore. International Conference on Information

Technology and Nanotechnology (ITNT). – 2020. – P. 1–4. doi: 10.1109/ITNT49337.2020.9253297.

7. Nozhkin, V.S. A model of advective changes in air humidity: a stochastic approach / V.S. Nozhkin, V.G. Zadorozhniy, I.I. Ulshin and O.I. Kanishcheva // Int. J. Engineering systems modelling and simulation. – 2020. – Vol. 11. – No. 4. – P. 160–169. doi: 10.1504/IJESMS.2020.111273.